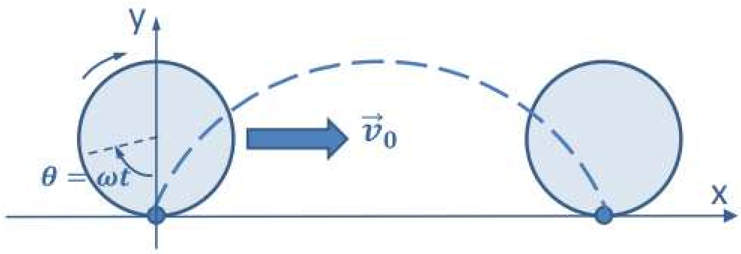
12. Una llanta de radio R rueda sin deslizar por un plano horizontal, con velocidad constante $\vec{v}_0$:



a) Verificar que la posición de un punto de su borde, inicialmente en el origen de coordenadas, está dada por las ecuaciones:

x (t) = R (ω t - sen ω t)

y (t)= R (1 - cos ω t)

En donde ω = v_0 / R es la velocidad angular de la llanta y t se mide desde el instante en que el punto está inicialmente en contacto con el plano.

En primer lugar es necesario hacer algunas aclaraciones:

1. $\bar{v}_0 = v_0 \hat{\imath}$ es la velocidad que tiene el centro de la llanta (punto C=centro de la llanta) y es constante (respecto del sistema de referencia "O" fijo a la superficie en las coordenadas cartesianas indicadas en el gráfico). Diremos que la velocidad del centro C respecto de O es $\bar{v}_{C/O} = v_0 \hat{\imath}$.
2. ω es la velocidad angular con la que gira la llanta alrededor de su centro (el punto C). Y como esa velocidad angular es constante $\theta = \omega t$ [1]
3. Llamaremos P al punto que se encuentra en el borde de la llanta que se indica en el gráfico.

a) Se pide determinar la posición de P respecto de la superficie (el sistema de referencia O). Es decir la posición de P respecto O, $\bar{r}_{P/O}$

Según los datos que nos da el problema:

- la posición del centro de la llanta (C) se mueve con MRU (movimiento rectilíneo uniforme) respecto la superficie O ($\bar{r}_{C/O}$ la posición de C respecto de O)
- el borde de la llanta P se mueve con MCU (movimiento circular uniforme) respecto del centro de la llanta C ($\bar{r}_{P/C}$ la posición de P respecto de C)

Éstos son movimientos que nos resultan más o menos conocidos. Por lo tanto podemos pensar en escribir estos movimientos por separado y luego aplicar la relatividad de Galileo para obtener lo pedido. Es decir,

$$\bar{r}_{P/O} = \bar{r}_{P/C} + \bar{r}_{C/O}$$ Expresión I

[1] Si la velocidad angular no fuese constante $\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$.

Empecemos escribiendo la posición del centro de la llanta respecto de la superficie O, $\bar{r}_{C/O}$

$$\bar{v}_{C/O} = v_0\hat{\imath}$$

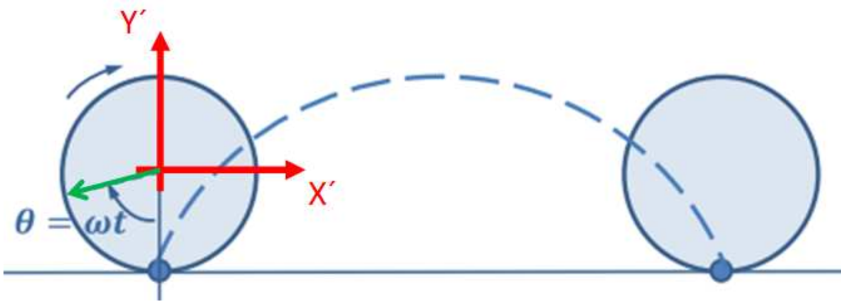
$$\bar{r}_{C/O} = \int v_0\hat{\imath}\ dt = v_0 t\hat{\imath} + \bar{D}$$

Donde $\bar{D} = 0\hat{\imath} + R\hat{\jmath}$ porque el centro de la llanta está inicialmente en esa posición. Por lo tanto

$$\bar{r}_{C/O} = v_0 t\hat{\imath} + R\hat{\jmath}$$

Expresión II

Ahora tenemos que escribir la posición del punto P respecto del centro de la llanta C (indicado en color verde). Para eso utilizaremos un sistema de coordenadas cuyo origen está en C, como se indica en la figura en color rojo:



En este sistema, la posición de P respecto de C es:

$$\bar{r}_{P/C} = -Rsen(\theta)\widehat{\imath'} - Rcos(\theta)\widehat{\jmath'}$$

$$\bar{r}_{P/C} = -Rsen(\omega t)\widehat{\imath'} - Rcos(\omega t)\widehat{\jmath'}$$ [2]

Expresión III

Entonces, reemplazando la expresión (II) y (III) en la expresión (I) obtenemos:

$$\bar{r}_{P/O} = -Rsen(\omega t)\hat{\imath} - Rcos(\omega t)\hat{\jmath} + v_0 t\hat{\imath} + R\hat{\jmath}$$

$$\bar{r}_{P/O} = [v_0 t - Rsen(\omega t)]\,\hat{\imath} + [R - Rcos(\omega t)]\,\hat{\jmath}$$

[2] Queda esta expresión porque, según el gráfico el ángulo inicial es cero si lo consideramos que se mide como se indica en la figura.

OTRA FORMA DE PENSARLO: Consideramos que $\bar{r}_{P/C} = Rcos(-\omega t + \theta_0)\hat{\imath} + Rsen(-\omega t + \theta_0)\hat{\jmath}$, midiendo el ángulo desde el eje positivo de las x. Y la velocidad angular sería negativa porque el giro es antihorario (y para este sistema de coordenadas cartesianas, considerando la terna derecha, queda negativa). En ese caso el ángulo inicial sería $\theta_0 = \frac{6}{4}\pi$. Y si tenemos en cuenta las identidades trigonométricas

1. $cos(\alpha + \beta) = cos\theta \cdot cos\beta - sen\theta \cdot sen\beta$. Si $\beta = \frac{6}{4}\pi$ queda $sen\alpha$ y si $\alpha = -\omega t$, entonces el término de la componente en el eje x se podría escribir como $sen(-\omega t) =- sen(\omega t)$
2. $sen(\alpha + \beta) = sen\theta \cdot cos\beta + cos\theta \cdot sen\beta$. Si $\beta = \frac{6}{4}\pi$ queda $-cos\alpha$ y si $\alpha = -\omega t$ entonces ese término de la componente en el eje x se podría escribir como $-cos(-\omega t) =- cos(\omega t)$

Si consideramos que $v_0 = \omega \cdot R$:

$$\bar{r}_{P/O} = [R \cdot (\omega t - sen\omega t]\,\hat{\imath} + [R \cdot (1 - cos\omega t)]\,\hat{\jmath}$$

RESPUESTA (LO IMPORTANTE ES EL DESARROLLO)

PREGUNTAS EXTRAS

b) Escribir la velocidad y la aceleración del punto P, respecto de la superficie, en función del tiempo.

Una vez que tenemos la expresión de la posición del punto P en función del tiempo:

$$\bar{r}_{P/O} = [R \cdot (\omega t - sen\omega t]\,\hat{\imath} + [R \cdot (1 - cos\omega t)]\,\hat{\jmath}$$

Se puede determinar la velocidad derivando la posición respecto del tiempo:

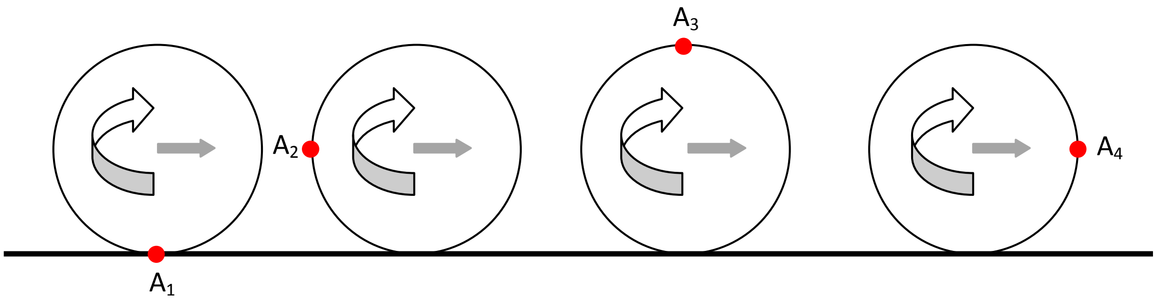
$$\bar{v}_{P/O} = \frac{d\bar{r}_{P/O}}{dt} = \frac{d[R \cdot (\omega t - sen\omega t]}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{d[R \cdot (1 - cos\omega t)]}{dt}\,\hat{\jmath}$$

$$\bar{v}_{P/O} = [R\omega - R\omega \cdot \cos{(\omega t)}]\hat{\imath} + [R\omega \cdot sen(\omega t)]\,\hat{\jmath}$$

Y si derivamos nuevamente, se obtiene la aceleración:

$$\bar{a}_{P/O} = \frac{d\bar{v}_{P/O}}{dt} = [R\omega^2 \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t)]\hat{\imath} + [R\omega^2 \cdot cos(\omega t)]\,\hat{\jmath}$$

c) Analizar la velocidad y aceleración cuando el punto P se encuentra en los puntos: A1, A2, A3 y A4 que se indican en la figura.



Si bien tenemos la expresión de la velocidad y la aceleración en función del tiempo, sería conveniente escribirlas en función del ángulo ya que podemos asociar:

- punto A_1 con $\theta_1 = 0$ (o en su forma general $\theta_1 = 2k\pi$ siendo k un número natural)
- punto A_2 con $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (o en su forma general $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ siendo k un número natural)
- punto A_3 con $\theta_3 = \pi$ (o en su forma general $\theta_3 = \pi + 2k\pi$ siendo k un número natural)
- punto A_4 con $\theta_4 = \frac{3\pi}{2}$ (o en su forma general $\theta_4 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ siendo k un número natural)

Para escribir la velocidad y la aceleración en función del ángulo, sólo tenemos que reemplazar $\theta = \omega t$. Además podemos recordar que $v_0 = \omega \cdot R$ para reemplazarlo en la expresión de la velocidad. De esta forma nos queda que:

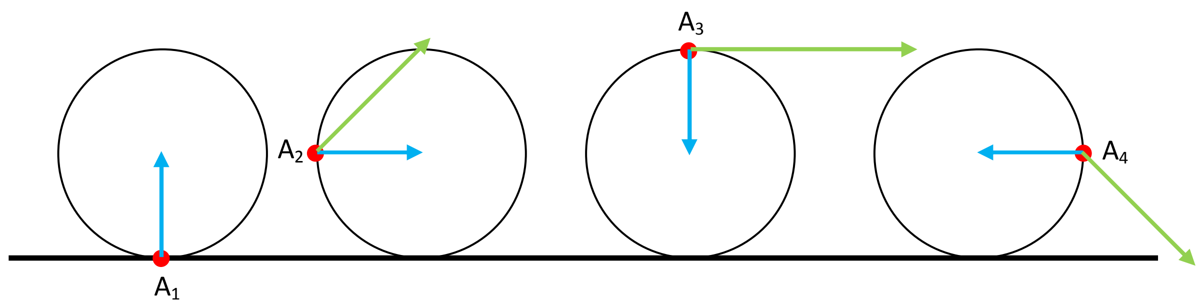
$$\bar{v}_{P/O} = [v_0 - v_0 \cdot \cos(\theta)]\hat{\imath} + [v_0 \cdot sen(\theta)]\,\hat{\jmath}$$

$$\bar{a}_{P/O} = [R\omega^2 \cdot \mathrm{sen}\,(\theta)]\hat{\imath} + [R\omega^2 \cdot cos(\theta)]\,\hat{\jmath}$$

Por último sólo queda evaluar el ángulo en cada caso:

- A_1: $\theta_1 = 0 \rightarrow \bar{v}_{P/O} = \bar{0}$; $\bar{a}_{P/O} = R\omega^2\,\hat{\jmath}$
- A_2: $\theta_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{v}_{P/O} = v_0\hat{\imath} + v_0\,\hat{\jmath}$; $\bar{a}_{P/O} = R\omega^2\,\hat{\imath}$
- A_3: $\theta_3 = \pi \rightarrow \bar{v}_{P/O} = 2v_0\hat{\imath}$; $\bar{a}_{P/O} = -R\omega^2\,\hat{\jmath}$
- A_4: $\theta_4 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \bar{v}_{P/O} = v_0\hat{\imath} - v_0\,\hat{\jmath}$; $\bar{a}_{P/O} = -\,R\omega^2\,\hat{\imath}$

Se podría hacer un esquema indicando los vectores velocidad (en color verde) y aceleración (en color azul) en cada punto:



IMPORTANTE: Se puede observar que, cuando el borde de la llanta (P) se encuentra sobre la superficie (punto A_1), P no tiene velocidad pero sí tiene aceleración. Esta es una particularidad que es consecuencia de la relación entre la velocidad del centro de la llanta y la velocidad angular. Tengan en cuenta este resultado para cuando estudiemos mecánica del cuerpo rígido, en el caso que un cuerpo rueda sin deslizar

NOTA FINAL: Pueden observar el gráfico de la trayectoria en una planilla de cálculo que se subió al campus. Ahí pueden cambiar los parámetros de la velocidad V_0 y el radio. Automáticamente ajusta qué valor de velocidad angular cumple con la condición que requiere este problema. Si ponen otros valores de velocidad angular, pueden observar la trayectoria en el caso que la llanta deslice respecto de la superficie.